【制御工学第二・同演習】現代制御２回目問題と略解

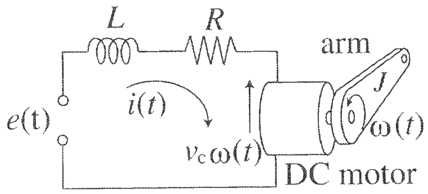
A クラス：2017/10/17(火) 出題 ⇒ 2017/10/24(火) 提出
B クラス：2017/10/16(月) 出題 ⇒ 2017/10/23(月) 提出

問題【1】$_{(02)}$：

下図の系を考える．ここで，DC モータはインダクタンス L のコイルと抵抗値 R の抵抗器としてモデル化でき，この回路に電圧 $e(t)$ を印加すると回路に電流 $i(t)$ が流れ，モータが回転する．モータは回転速度 $\omega(t)$ に比例した逆起電力 $v_c\omega(t)$ を発生する．ここで v_c は定数である．下記の問いに答えよ．

(1) 入力を電圧 $e(t)$，出力を $\omega(t)$ としたときの状態方程式と出力方程式を書け．
(2) 入力を電圧 $e(t)$，出力をモータの回転角 θ（$= \int \omega dt$）としたとき，この系の状態方程式と出力方程式を書け．(状態方程式も書き直すことになるので注意.)

[ヒント] $\ddot{i}$ と $\ddot{\omega}$ は使用禁止！(使っても意味がない)



問題【2】$_{(03)}$：

(1) $e^{\left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]t}$ を求めよ.（固有値を用いた方法とラプラス変換を用いた方法の両方で.）
(2) $e^{\left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]}$ を求めよ.

問題【3】$_{(04)}$：

$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，e^{At} を求めよ.（ラプラス変換で.）

問題【1】$_{(02)}$：

解答例　(1) テキストの式 (2.36)(2.37)(2.38) より，下式が得られる．

$$L\frac{di}{dt} = -Ri - v_c\omega + e$$
$$J\frac{d\omega}{dt} = k_t i$$

これより，状態方程式と出力方程式は下記の通りである．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -v_c/L \\ k_t/J & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} e \tag{1}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} \tag{2}$$

(2) 上記の状態方程式と $\dot{\theta} = \omega$ を組み合わせることにより，状態方程式と出力方程式は下記のように得られる．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -v_c/L & 0 \\ k_t/J & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e \tag{3}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} \tag{4}$$

【注意】 出力量として θ が必要であるので，θ も状態ベクトルに含めなければ状態方程式として表現できない．状態ベクトルに何を含めて何を含めないべきかは，モデル化の目的や，物理現象のどこに着目するかということに依存する．

問題【2】$_{(03)}$：

(1) の解答例

固有値を用いた場合：行列 $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ の特性多項式は $s^2 + 2s + 2$ であるので，固有値は $-1 \pm j$．また，それぞれに対する固有ベクトルは $[\pm j, 1]^T$ よって，

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1+j & 0 \\ 0 & -1-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1+j & 0 \\ 0 & -1-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & j \\ -1 & j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
e^{\left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]t} &= \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t}e^{jt} & 0 \\ 0 & e^{-t}e^{-jt} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & j \\ -1 & j \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^{-t}}{2j}\begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{jt} & je^{jt} \\ -e^{-jt} & je^{-jt} \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^{-t}}{2j}\begin{bmatrix} j(e^{jt}+e^{-jt}) & -e^{jt}+e^{-jt} \\ e^{jt}-e^{-jt} & j(e^{jt}+e^{-jt}) \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ラプラス変換を用いた場合：$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ とすると，

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \text{ より } (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{-1}{s^2+2s+2} \\ \frac{1}{s^2+2s+2} & \frac{s+1}{s^2+2s+2} \end{bmatrix}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\sin(t) \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\cos(t)
\end{aligned}$$

より，

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

解答例　**(2) の解答例**

(1) の解答に $t=1$ を代入すればよい．

$$e^{\left[\begin{smallmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right]} = \frac{1}{e}\begin{bmatrix}\cos 1 & -\sin 1\\ \sin 1 & \cos 1\end{bmatrix}$$

問題【**3**】$_{(04)}$：

解答例

$$sI-A=\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s\end{bmatrix}\quad \text{より}\quad (sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s}{s^2+s+1} & \frac{-1}{s^2+s+1}\\ \frac{1}{s^2+s+1} & \frac{s+1}{s^2+s+1}\end{bmatrix} \tag{5}$$

ここで，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+s+1}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3/4}}{(s+1/2)^2+3/4}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1/2}{s^2+s+1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right]=e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)$$

したがって，

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=e^{-t/2}\begin{bmatrix}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t & -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t & \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{bmatrix} \tag{6}$$