【制御工学第二・同演習】現代制御3回目問題と略解

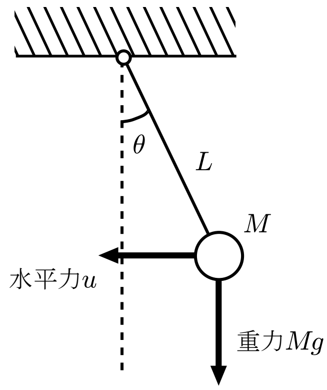
A クラス：2017/10/24(火) 出題 ⇒ 2017/10/31(火) 提出
B クラス：2017/10/23(月) 出題 ⇒ 2017/10/30(月) 提出

問題【1】$_{(08)}$：

右図のシステムについて下記の問いに答えよ．

(1) の状態方程式を書け．ただし入力を u，出力を θ とする．

(2) θ，$\dot{\theta}$，および u が十分に小さいとする．このとき，(1) のシステムを線型近似した線型の状態方程式を書け．



問題【2】$_{(06)}$：

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & a \end{bmatrix}$ とする．系 $\dot{x} = Ax$ が漸近安定となる a の範囲を求めよ．

問題【3】$_{(80)}$：

次式で表されるシステムに対して，下記の問いに答えよ．ここで，a および b は実数とする．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

[1] この系の伝達関数を求めよ．

[2] この系が安定になるために a と b が満たすべき条件を求めよ.（最も単純な形で表現するように.）

問題【1】$_{(08)}$：

[(1) の解答例]　運動方程式は下式のようになる．

$$ML\ddot{\theta} = (-Mg\sin\theta - u\cos\theta)$$
$$\Longleftrightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \frac{u}{ML}\cos\theta$$

したがって状態方程式は下記のようになる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g\sin\theta}{L} - \frac{u\cos\theta}{ML} \end{bmatrix} \tag{1}$$
$$y = \theta \tag{2}$$

[別の書き方]　状態方程式は下記のようになる．

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x)$$

ただし，$x = [\theta, \dot{\theta}]^\top$ であり，関数 f および h はそれぞれ下記で定義される関数である．

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g\sin x_1}{L} - \frac{u\cos x_1}{ML} \end{bmatrix}, \quad h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 \tag{3}$$

[追記]　非線形の状態方程式と出力方程式の書き方については特に決まりはないが，自分と読み手にとって，何が出力で何が状態量なのかが明確に分かるような書き方をするように．出力方程式の左辺は必ず単一の変数になり，それが出力量を意味する.（左辺には $a+b$ のような複数の変数の演算が含まれることは絶対にない．

[(2) の解答例]　式 (3) で定義された関数 f および h を用いる．$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$ であり，θ，$\dot{\theta}$，および u が小さいので，$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$u = 0$ の近傍での線形化になる．なお，$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より，$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$u = 0$ は平衡点である．

関数 f および h の偏微分は

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], u=0} &= \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g\cos\theta}{L} + \frac{u\sin\theta}{L} & 0 \end{bmatrix}\right|_{x=\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \\
\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], u=0} &= \left.\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\cos\theta}{ML} \end{bmatrix}\right|_{x=\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ML} \end{bmatrix} \\
\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]} &= \left.\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right|_{x=\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．したがって，線形化された状態方程式は下記である．

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ML} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{4}
$$

問題【2】$_{(06)}$：

[解答例]　系 $\dot{x} = Ax$ が漸近安定となるには，A の特性多項式 $\det(sI - A)$ の根の実部がすべて負であればよい．

$$
\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-0 & -1 \\ 2 & s-a \end{vmatrix} = s^2 - as + 2
$$

より，その根は $s = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-8}}{2}$ である．

i) $a^2 - 8 < 0$ のとき ($-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$ のとき)，実部 $\dfrac{a}{2}$ が負であればよいから $-2\sqrt{2} < a < 0$.

ii) $a^2 - 8 \geq 0$ のとき ($a \leq -2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} \leq a$ のとき)，実部 $\dfrac{a}{2} \pm \dfrac{\sqrt{a^2-8}}{2}$ が負であればよい．$\left|\dfrac{a}{2}\right| > \left|\dfrac{\sqrt{a^2-8}}{2}\right|$ より，$a \leq -2\sqrt{2}$ であれば $\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2-8}}{2} < 0$ および $\dfrac{a}{2} - \dfrac{\sqrt{a^2-8}}{2} < 0$ が成立する．

よって，系 $\dot{x} = Ax$ は漸近安定となるのは$\underline{a < 0}$のときである．

[補足]　系 $\dot{x} = Ax$ が漸近安定となるとき,「行列 A は安定である」，あるいは「行列 A はフルビッツ（Hurwitz）である」などという．

問題【3】$_{(80)}$：

[1]

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix} s-b & 0 \\ 1 & s-a \end{bmatrix}}{(s-a)(s-b)}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-a)(s-b)}\end{aligned}$$

[2]　このシステムの極は a および b であるので，これらがともに負であればよい．すなわち，$a < 0 \ \wedge \ b < 0$.