【制御工学第二・同演習】現代制御 4 回目問題と略解

A クラス：2017/10/31(火) 出題 ⇒ 2017/11/7(火) 提出

問題【1】$_{(11)}$：下記のシステムの可制御性と可観測性を調べよ．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

問題【2】$_{(14)}$：

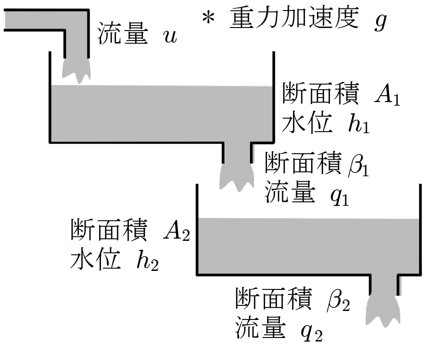
右図のシステムについて下記の問いに答えよ．

(1) このシステムの状態方程式と出力方程式を書け．ただし入力を u，出力を h_2 とする．また，各水槽の水位と排水溝の流量との関係は，ベルヌーイの法則に従い，

$$q_1 = \beta_1\sqrt{2gh_1}, \quad q_2 = \beta_2\sqrt{2gh_2}$$

であるとする．

(2) この系は，入力 u を $u = u_s$ で一定に保ったとき，$h_1 = h_{1s}$，$h_2 = h_{2s}$ で平衡状態にあるとする．(1) の非線形な状態方程式を平衡状態近傍で線形化し，線形の状態方程式と出力方程式を書け．



問題【3】$_{(37)}$：系 $\dot{x} = Ax + Bu$ が可制御であるとする．時刻 $t = 0$ における状態が $x(0) = p$ であったとする．このとき，時刻 T において $x(T) = 0$ を実現するような入力 $u(t)$，$t \in [0, T]$ を求めよ．

問題【1】$_{(11)}$：

[解答例]　可制御性行列は

$$M_c = \left[\ B \;\middle|\; AB \;\middle|\; A^2B\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

となる．よって，$\mathrm{rank}(M_c) = 2 < 3$ より，この系は不可制御．

可観測性行列は

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

となる．（ただし $*$ は適切な実数を表す．）よって，$\mathrm{rank}(M_o) = 3$ より，この系は可観測である．

（註：最後まで計算しなくてもランクは分かる．）

問題【2】$_{(14)}$：

[(1) の解答例]　水位の時間変化率と流量の関係は

$$\dot{h}_1 = \frac{u - q_1}{A_1}, \quad \dot{h}_2 = \frac{q_1 - q_2}{A_2}$$

と表せる．また，$q_1 = \beta_1\sqrt{2gh_1}$，$q_2 = \beta_2\sqrt{2gh_2}$，であるので，下式が得られる．

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{u - \beta_1\sqrt{2gh_1}}{A_1} \\ \dot{h}_2 &= \frac{\beta_1\sqrt{2gh_1} - \beta_2\sqrt{2gh_2}}{A_2} \end{aligned}$$

したがって，状態方程式と出力方程式は下記のようになる．

$$\dot{x} = f(x, u), \ y = k(x)$$

ただしここで，

$$x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u\right) = \begin{bmatrix} \frac{u - \beta_1\sqrt{2gx_1}}{A_1} \\ \frac{\beta_1\sqrt{2gx_1} - \beta_2\sqrt{2gx_2}}{A_2} \end{bmatrix}, \quad k\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_2 \tag{1}$$

である．

[(2) の解答例]　式 (1) で定義される関数 f と k を偏微分すると，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1\sqrt{g}}{A_1\sqrt{2x_1}} & 0 \\ \frac{\beta_1\sqrt{g}}{A_2\sqrt{2x_1}} & -\frac{\beta_2\sqrt{g}}{A_2\sqrt{2x_2}} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

となる．入力が u_s のときに水位が h_{1s} および h_{2s} で平衡状態に達するので，

$$f\left(\begin{bmatrix} h_{1s} \\ h_{2s} \end{bmatrix}, u_s\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である．したがって，

$$\tilde{h}_1 = h_1 - h_{1s}, \quad \tilde{h}_2 = h_2 - h_{2s}, \quad \tilde{u} = u - u_s, \quad \tilde{y} = y - h_{2s}, \quad x_s = \begin{bmatrix} h_{1s} \\ h_{2s} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = x - x_s$$

とすると，

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= f(x, u) \\ &\approx f(x_s, u_s) + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_s, u=u_s}\right)\tilde{x} + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=x_s, u=u_s}\right)\tilde{u} \\ &= \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_s, u=u_s}\right)\tilde{x} + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=x_s, u=u_s}\right)\tilde{u} \\ y_s &= k(x) - k(x_s) \\ &\approx k(x_s) + \left(\left.\frac{\partial k}{\partial x}\right|_{x=x_s}\right)\tilde{x} - k(x_s) \\ &= \left(\left.\frac{\partial k}{\partial x}\right|_{x=x_s}\right)\tilde{x} \end{aligned}$$

よって線形の状態方程式と出力方程式は下記のようになる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{h}}_1 \\ \dot{\tilde{h}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1\sqrt{g}}{A_1\sqrt{2h_{1s}}} & 0 \\ \frac{\beta_1\sqrt{g}}{A_2\sqrt{2h_{1s}}} & -\frac{\beta_2\sqrt{g}}{A_2\sqrt{2h_{2s}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} \tag{4}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

[注意]　厳密にいうと，上記の出力方程式では出力は $\tilde{h}_2 = h_2 - h_{2s}$ であり，(1) で出力であると指定されていた h_2 とは異なる．しかし，h_{2s} は定数であるので，$\tilde{h}_2$ を新たな出力量としても本質的な違いは生じない．結論としては，状態方程式の書き方としてはこれで問題ない．

[注意]　式 (4)(5) 中の各行列は，式 (2) 中の行列に，$x_1 = h_{1s}$，$x_2 = h_{2s}$，$u = u_s$ を代入したものであることに注意すること．

問題【**3**】$_{(37)}$：

[解答例]　テキスト p.63 の議論より，

$$u(t) = -B^\top (e^{-At})^\top \left(\int_0^T e^{-A\tau} BB^\top (e^{-A\tau})^\top d\tau \right)^{-1} p$$

[補足説明]　上式の真ん中の行列

$$G_c = \int_0^T e^{-A\tau} BB^\top (e^{-A\tau})^\top d\tau$$

は，可制御性グラム行列と呼ばれる行列であり，これは定数行列である（定積分であり，t に依存しない）．系が可制御であるとき，可制御性グラム行列は正則になり，逆行列を持つ.（テキスト p.63 の下のほうを参照.）

線形状態方程式の解は，テキスト 3.2 節で学んだように，

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

である．上式の解に $t = T$，$x(0) = p$ を代入して，さらに，[解答例] で示した $u(t)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
x(T) &= e^{At} p + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \left(-B^\top (e^{-At})^\top \left(\int_0^T e^{-A\tau_2} BB^\top (e^{-A\tau_2})^\top d\tau_2 \right)^{-1} p \right) d\tau \\
&= e^{AT} p - e^{AT} \left(\int_0^T e^{-A\tau} BB^\top (e^{-At})^\top \left(\int_0^T e^{-A\tau_2} BB^\top (e^{-A\tau_2})^\top d\tau_2 \right)^{-1} d\tau \right) p \\
&= e^{AT} p - e^{AT} \left(\int_0^T e^{-A\tau} BB^\top (e^{-At})^\top d\tau \right) \left(\int_0^T e^{-A\tau_2} BB^\top (e^{-A\tau_2})^\top d\tau_2 \right)^{-1} p \\
&= e^{AT} p - e^{AT} p \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．すなわち，[解答例] の $u(t)$ は $x(T) = 0$ を実現する入力である．