【制御工学第二・同演習】現代制御 4 回目問題と略解

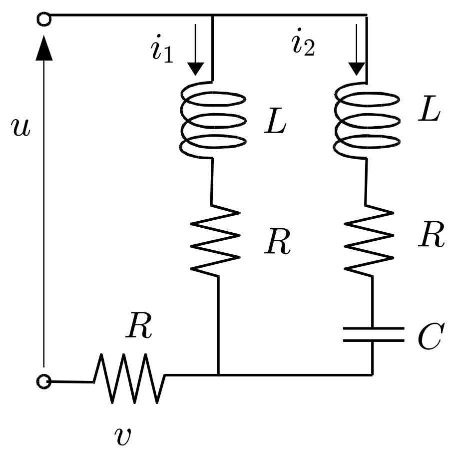
B クラス：2017/10/30(月) 出題 ⇒ 2017/11/6(月) 提出

問題【1】$_{(11)}$：下記のシステムの可制御性と可観測性を調べよ．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

問題【2】$_{(20)}$：

右図のシステムの状態方程式と出力方程式を書け．ただし，入力を電圧 u とし，出力を図の最下部の抵抗器の両端の電位差 v とする．また，この系の可観測性を調べよ．



問題【3】$_{(37)}$：系 $\dot{x} = Ax + Bu$ が可制御であるとする．時刻 $t = 0$ における状態が $x(0) = p$ であったとする．このとき，時刻 T において $x(T) = 0$ を実現するような入力 $u(t)$，$t \in [0, T]$ を求めよ．

問題【1】$_{(11)}$：

[解答例]　可制御性行列は

$$M_c = \left[\begin{array}{c|c|c} B & AB & A^2B \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

となる．よって，$\mathrm{rank}(M_c) = 2 < 3$ より，この系は不可制御．

可観測性行列は

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

となる．（ただし $*$ は適切な実数を表す．）よって，$\mathrm{rank}(M_o) = 3$ より，この系は可観測である．
（註：最後まで計算しなくてもランクは分かる．）

問題【2】$_{(20)}$：

[解答例]　図より，

$$u = L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 + R(i_1 + i_2) \tag{1}$$

$$u = L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + v_c + R(i_1 + i_2) \tag{2}$$

$$v_c = \frac{1}{C}\int i_2 dt \tag{3}$$

が成立する．ここで式 (3) は

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i_2 \tag{4}$$

となる．式 (1)(2)(4) より，

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{2Ri_1}{L} - \frac{Ri_2}{L} + \frac{u}{L} \tag{5}$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{Ri_1}{L} - \frac{2Ri_2}{L} - \frac{v_c}{L} + \frac{u}{L} \tag{6}$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i_2 \tag{7}$$

となる．すなわち，状態方程式は下記のようになる．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & -\frac{R}{L} & 0 \\ -\frac{R}{L} & -\frac{2R}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{8}$$

また，出力方程式は下記のようになる．

$$y = \begin{bmatrix} R & R & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} \tag{9}$$

なお，この系の可観測性行列は

$$M_O = \begin{bmatrix} R & R & 0 \\ -\frac{3R^2}{L} & -\frac{3R^2}{L} & -\frac{R}{L} \\ \frac{9R^3}{L^2} & \frac{9R^3}{L^2} - \frac{R}{CL} & \frac{3R^2}{L^2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

である．この行列はフルランクであるので，この系は可観測である．

（第 1 行と第 2 行は明らかに独立．第 3 行は (3,1) 成分と (3,2) 成分が異なるので，あきらかに第 1 行と第 2 行の両方から独立．よって，この行列はフルランク）

問題【3】$_{(37)}$：

[解答例]　テキスト p.63 の議論より，

$$u(t) = -B^\top (e^{-At})^\top \left(\int_0^T e^{-A\tau} BB^\top (e^{-A\tau})^\top d\tau\right)^{-1} p$$

[補足説明]　上式の真ん中の行列

$$G_c = \int_0^T e^{-A\tau} BB^\top (e^{-A\tau})^\top d\tau$$

は，可制御性グラム行列と呼ばれる行列であり，これは定数行列である（定積分であり，t に依存しない）．系が可制御であるとき，可制御性グラム行列は正則になり，逆行列を持つ.（テキスト p.63 の下のほうを参照.）

線形状態方程式の解は，テキスト 3.2 節で学んだように，

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

である．上式の解に $t = T$，$x(0) = p$ を代入して，さらに，[解答例] で示した $u(t)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
x(T) &= e^{At}p + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \left(-B^\top (e^{-At})^\top \left(\int_0^T e^{-A\tau_2} BB^\top (e^{-A\tau_2})^\top d\tau_2 \right)^{-1} p \right) d\tau \\
&= e^{AT}p - e^{AT} \left(\int_0^T e^{-A\tau} BB^\top (e^{-At})^\top \left(\int_0^T e^{-A\tau_2} BB^\top (e^{-A\tau_2})^\top d\tau_2 \right)^{-1} d\tau \right) p \\
&= e^{AT}p - e^{AT} \left(\int_0^T e^{-A\tau} BB^\top (e^{-At})^\top d\tau \right) \left(\int_0^T e^{-A\tau_2} BB^\top (e^{-A\tau_2})^\top d\tau_2 \right)^{-1} p \\
&= e^{AT}p - e^{AT}p \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．すなわち，[解答例] の $u(t)$ は $x(T) = 0$ を実現する入力である．