【制御工学第二・同演習】現代制御 5 回目の問題の略解

A クラス：2017/11/14(火) 出題 ⇒ 2017/11/21(火) 提出

B クラス：2017/11/6(月) 出題 ⇒ 2017/11/13(月) 提出

問題【**1**】$_{(12)}$：次式で表されるシステムに対して下記の問いに答えよ．

$$\dot{x} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

(1) この系の可制御性を調べよ．

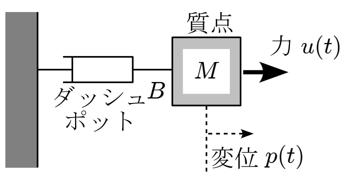
(2) 極を $-1 \pm j$ とする状態フィードバック則を求めよ．

問題【**2**】$_{(30)}$：

(1) 右図に示すシステムの状態方程式を書け．ここで，入力は力 u とする．(出力方程式は不要)

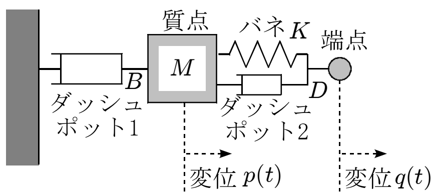
(2) このシステムの可制御性を調べよ．

(3) $M = 1$ [kg]，$B = 2$ [N·s/m] とする．このとき，極を $-2 \pm 3j$ [s^{-1}] とする状態フィードバック則を求めよ．(すなわち，ある初期位置から出発したとき，角周波数 3[rad/s] で振動しながらその振幅が e^{-2t} で減衰して原点に収束するような状態フィードバック則を求めよ．)



問題【**3**】$_{(40)}$：

右図の系について以下の問いに答えよ．ただし，端点の速度 $u(t) = \dot{q}(t)$ を入力とし，質点の変位 $y(t) = p(t)$ を出力とする．また，$p(t) = q(t) = 0$，$\dot{p}(t) = 0$，$u(t) = 0$ のとき，系は平衡状態にあるとする．また，K，M，B，D はすべて正の定数とする．



(1) この系の状態方程式と出力方程式はそれぞれ適切な行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ とベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ を用いて

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t), \quad y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

という形で表現できる．このときの行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，およびベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(2) この系の可観測性を調べよ．その際，判別方法を明確に説明せよ．

問題【**1**】$_{(12)}$：

[(1) の解答] 可制御性行列は

$$U_C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

である．明らかにこれはフルランクであるので，この系は可制御である．

[注意]　この系が可制御でなければ，状態フィードバックによる任意極配置は不可能である．

[**(2)** の解答]　状態フィードバック則を $u = -\begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} x$ とすると，そのときの閉ループ系の状態方程式は，

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} x \\ \iff \quad \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1-2p & 2-2q \\ 3-p & -1-q \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

となる．この閉ループ系の極は多項式

$$\begin{aligned} \det\left(s\boldsymbol{I} - \begin{bmatrix} 1-2p & 2-2q \\ 3-p & -1-q \end{bmatrix}\right) &= (s-1+2p)(s+1+q) - (-2+2q)(-3+p) \\ &= s^2 + (2p+q)s + (4p+5q-7) \end{aligned} \tag{1}$$

の根である．根が $-1 \pm j$ のとき，

$$2p + q = 2, \qquad 4p + 5q - 7 = 2 \tag{2}$$

となり，この連立方程式の解は $p = 1/6$，$q = 5/3$ である．よって，必要な状態フィードバック則は下記である．

$$u = -\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} x \tag{3}$$

問題【**2**】$_{(30)}$：

[**(1)** の解答]　運動方程式は $M\ddot{p} + B\dot{p} = u$ であるので，状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B/M & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/M \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{4}$$

である．

[**(2)** の解答]　この系の可制御性行列は下記である．

$$U_C = \begin{bmatrix} 1/M & -B/M^2 \\ 0 & 1/M \end{bmatrix}$$

これはフルランクであるので，この系は可制御である．

[**(3)** の解答]　状態フィードバック則を $u = -\begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} x$ とすると，そのときの閉ループ系の状態方程式は，

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -B/M & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 1/M \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} x \\ \iff \quad \dot{x} &= \begin{bmatrix} -(B+E)/M & -F/M \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

である．この閉ループ系の極は多項式

$$\det\left(s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}-(B+E)/M & -F/M\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = (s+(B+E)/M)s-(F/M)(-1)$$
$$= s^2+s(B+E)/M+F/M \tag{6}$$

の根である．根が $-2\pm 3j$ [s^{-1}] のとき，

$$(B+E)/M = 4[\mathrm{N{\cdot}s/m}], \qquad F/M = 13[\mathrm{N/m}] \tag{7}$$

となり，この連立方程式の解は $E=2$ [N·s/m]，$F=13$ [N/m] である．よって，必要な状態フィードバック則は下記である．

$$u=-13p-2\dot{p} \tag{8}$$

（これは，P ゲインが 13 [N/m] で D ゲインが 2 [N·s/m] の PD 制御則である．）

問題【3】(40)：
[1] この系の運動方程式は $M\ddot{p}=-B\dot{p}+K(q-p)+D(\dot{q}-\dot{p})$ と書ける．これを変形すると，

$$\ddot{p}=-\frac{B+D}{M}\dot{p}-\frac{K}{M}p+\frac{K}{M}q+\frac{D}{M}\dot{q}$$

となる．入力が $u=\dot{q}$ であり出力が $y=p$ であるので，状態方程式は

$$\begin{bmatrix}\ddot{p}\\ \dot{p}\\ \dot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{B+D}{M} & -\frac{K}{M} & \frac{K}{M}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{p}\\ p\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{D}{M}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u, \quad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{p}\\ p\\ q\end{bmatrix}$$

となる．すなわち，下記のようになる．

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\dot{p}\\ p\\ q\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\frac{B+D}{M} & -\frac{K}{M} & \frac{K}{M}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{D}{M}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

[2] この系の可観測性行列は

$$U_O=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -\frac{B+D}{M} & -\frac{K}{M} & \frac{K}{M}\end{bmatrix}$$

である．明らかに $\mathrm{rank}U_O=3$ であるので，この系は可観測である．