【制御工学第二・同演習】現代制御 6 回目問題略解

A クラス：2017/11/21(火) 出題 ⇒ 2017/11/28(火) 提出

問題【1】$_{(13)}$：次式で表されるシステムに対して，極が $-1 \pm j$ である同一次元オブザーバを求めよ．

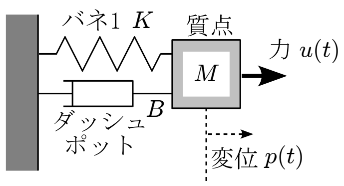
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

問題【2】$_{(31)}$：

　下図の系について以下の問いに答えよ．ただし，質点に加わる力 $u(t)$ を入力とし，質点の速度 $y(t) = \dot{p}(t)$ を出力とする．また，K，M，B はすべて正の定数とする．

[1] この系の状態方程式と出力方程式を書け．

[2] $M = 1$[kg], $K = 1$[N/m], $B = 1$[N·s/m] とする．このとき，極が $-2 \pm j$[s^{-1}] である同一次元オブザーバを求めよ．



問題【1】$_{(13)}$：

[解答]　同一次元オブザーバは

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - E \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \right) z + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u + Ey$$

という形であらわせる．ここで，z が x の推定値である．$E = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}^T$ とするとオブザーバの極は行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2p & 3-p \\ 2-2q & -1-q \end{bmatrix} \tag{1}$$

の固有値である．この固有値が $-1 \pm j$ と一致するのは，$p = 1/6$，$q = 5/3$ となるときである．したがって，極が $-1 \pm j$ である同一次元オブザーバは

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 \\ 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1/6 \\ 5/3 \end{bmatrix} y$$

すなわち

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 2/3 & 17/6 \\ -4/3 & -8/3 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1/6 \\ 5/3 \end{bmatrix} y$$

である．ここで，z が x の推定値となる．

問題【2】$_{(31)}$：

[解答例]　[1] この系の運動方程式は

$$M\ddot{p} + B\dot{p} + Kp = u$$

と書ける．状態方程式は下記のようになる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{M} & -\frac{K}{M} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ p \end{bmatrix}$$

[2]　同一次元オブザーバは

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - E \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + Ey$$

という形であらわせる．ここで，z が x の推定値である．$E = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}^T$ とするとオブザーバの極は行列

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-X & -1 \\ 1-Y & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

の固有値である．この固有値は特性多項式

$$(s-(-1-X))s-(1)(Y-1) = s^2+(1+X)s+(1-Y) \tag{3}$$

の根であり，これが $-2 \pm j$ と一致するのは $1+X=4$，$1-Y=5$，すなわち，$E=[3,-4]$ のときである．したがって，極が $-2 \pm j$ である同一次元オブザーバは

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} y$$

すなわち

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} y$$

である．ここで，z が x の推定値となる．