【制御工学第二・同演習】現代制御 6 回目問題と略解

B クラス：2017/11/13(月) 出題 ⇒ 2017/11/20(月) 提出

問題【1】$_{(22)}$：次式で表されるシステムに対して，極が $-1 \pm j$ である同一次元オブザーバを求めよ．

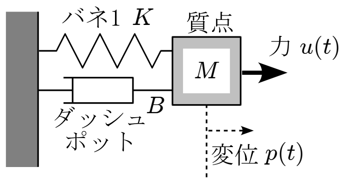
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

問題【2】$_{(31)}$：

下図の系について以下の問いに答えよ．ただし，質点に加わる力 $u(t)$ を入力とし，質点の速度 $y(t) = \dot{p}(t)$ を出力とする．また，K，M，B はすべて正の定数とする．

[1] この系の状態方程式と出力方程式を書け．

[2] $M = 1$[kg], $K = 1$[N/m], $B = 1$[N·s/m] とする．このとき，極が $-2 \pm j$[s^{-1}] である同一次元オブザーバを求めよ．



問題【1】$_{(22)}$：

[解答]　系 $\dot{x} = Ax + Bu$，$y = Cx$ に対する同一次元オブザーバは，適切な 2×1 行列 E を用いて

$$\dot{z} = (A - EC)z + Bu + Ey \tag{1}$$

と表せる．ここで，z が x の推定値となる．このオブザーバの極は $A - EC$ の固有値である．$E = [p, q]^T$ とすると，

$$A - EC = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ 1 & -1-q \end{bmatrix} \tag{2}$$

となる．この行列の固有値を λ とすると，これは下記の特性多項式の根となる．

$$\det(\lambda I - (A - EC)) = \begin{vmatrix} \lambda & p \\ -1 & \lambda + 1 + q \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1 + q) + p = \lambda^2 + (1 + q)\lambda + p \tag{3}$$

すなわち，λ は

$$\lambda^2 + (1 + q)\lambda + p = 0 \tag{4}$$

の解である．よって，$\lambda = -1 \pm j$ が上式の解であるためには，$1 + q = 2$ および $p = 2$ が満たされる必要がある．すなわち，$E = [2, 1]^T$ である．よって，同一次元オブザーバは

$$\dot{z} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} y \tag{5}$$

すなわち

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} y \tag{6}$$

である．

注意 1： 上記の式 (5) で終わっている解答は，基本的に不可．他人への情報提示は，単純化できるところはできるだけ単純化してから行うこと．

注意 2： 同じ理由で，

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (y - w), \quad w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} z \tag{7}$$

も基本的に不可．無駄な中間変数 w を用いて式を複雑にしても意味がない．導出過程と最終結果は厳密に区別すること．

注意 3： y を Cx で置き換えて，

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \tag{8}$$

とした解答は不可．最後に解答すべきものは，オブザーバのアルゴリズムである．状態量 x は直接観測できない（だからオブザーバを作る）ので，x を含んだアルゴリズムは実装できない．だから不可．

注意 4： 状態フィードバック（$u = -Kx$）との混同が多く見られたが，別のものであることに注意．

問題【2】$_{(31)}$：

[解答例] [1] この系の運動方程式は

$$M\ddot{p} + B\dot{p} + Kp = u$$

と書ける．状態方程式は下記のようになる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{M} & -\frac{K}{M} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ p \end{bmatrix}$$

[2] 同一次元オブザーバは

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - E \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + Ey$$

という形であらわせる．ここで，z が x の推定値である．$E = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}^T$ とするとオブザーバの極は行列

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-X & -1 \\ 1-Y & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

の固有値である．この固有値は特性多項式

$$(s - (-1 - X))s - (1)(Y - 1) = s^2 + (1 + X)s + (1 - Y) \tag{10}$$

の根であり，これが $-2 \pm j$ と一致するのは $1 + X = 4$，$1 - Y = 5$，すなわち，$E = [3, -4]$ のときである．したがって，極が $-2 \pm j$ である同一次元オブザーバは

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} y$$

すなわち

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} y$$

である．ここで，z が x の推定値となる．